

Epreuve de mathématiques Serie D, F 03H00

Exercice 1 : 8 points

On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1 ; u_2 et v_2 .
2.
 - 2.1 Montrer que $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{6}(v_n - u_n)$.
 - 2.2 Que peut-on conclure pour la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$?
 - 2.3 Exprimer w_n en fonction de n .
 - 2.4 Quelle est la limite de la suite (w_n) ?
3. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$
 - 3.1 Calculer t_0, t_1 et t_2 .
 - 3.2 Montrer que la suite (t_n) est constante.
 - 3.3 On admet que les suite (u_n) et (v_n) sont convergent. Déterminer $\lim u_n$ et $\lim v_n$

Exercice 2 : 12 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - (2\sqrt{3})z + 4 = 0$$

2. On considère les points A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - i$, B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + i$ et C le milieu du segment $[OB]$.
 - 2.1 Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C .
 - 2.2 Sur une figure, placer les points A, B et C .
 - 2.3 Vérifier que $OB = OA$. Que peut-on déduire pour le triangle OAB ?
 - 2.4 Calculer $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire que le triangle OAB est équilatéral.
3. Soit D l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et E l'image de D par la translation de vecteur $2\vec{v}$.
 - 3.1 Placer les points D et E sur la figure.
 - 3.2 Déterminer l'affixe du point D .
 - 3.3 Montrer que l'affixe z_E du point E vérifie $z_E = \frac{1}{2}[1 + i(4 - \sqrt{3})]$.
 - 3.4 Justifier à l'aide des questions précédentes que les points A et E sont situés sur la médiatrice de $[OB]$.
 - 3.5 En déduire que les points A, C et E sont alignés.

Exercice 3 : 5 points

Une usine fabrique et commercialise des sachets de poudre de cacao. Sa capacité journalière de fabrication est comprise entre 1000 et 3000 sachets. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimée en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle $[1, 3]$ par la fonction B définie par :

$$B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 + 2 \ln x$$

Le directeur de l'usine veut accroître le bénéfice de l'entreprise. N'ayant pas de personnel qualifié, il te demande le nombre de sachets à produire en un jour, pour que l'entreprise réalise **un bénéfice maximal**. Détermine le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir un bénéfice maximal.

Exercice 4 : 10 points

Des scientifiques participent à un séminaire sur le thème :

” Le réchauffement climatique et ses conséquences sur les économies des pays”.

Une enquête organisée par un organisme international a révélé que **75%** des scientifiques croient au réchauffement climatique et parmi ceux-ci, il y a des écologistes.

Selon cette enquête :

- La probabilité qu’un scientifique qui croit au réchauffement climatique soit un écologiste est **0,6**
- La probabilité qu’un scientifique qui ne croit pas au réchauffement climatique ne soit pas un écologiste est **0,08**

On choisit au hasard un scientifique ayant participé au séminaire. On désigne par :

R l’évènement : ”Le scientifique interrogé croit au réchauffement climatique” ;

E l’évènement : ”Le scientifique interrogé est un écologiste”.

1. Déterminer à l’aide des données du problème, les probabilités : $P(R)$, $P_{\overline{R}}(\overline{E})$, $P_R(E)$.
2. Calculer $P_R(\overline{E})$.
3. Montrer que $P(\overline{R} \cap E) = 0,23$
4. Montrer que la probabilité qu’un scientifique interrogé est un écologiste est égale à 0,68
5. Un scientifique interrogé est un écologiste. Quelle est la probabilité qu’il ne croit pas au réchauffement climatique ?

Exercice 5 : 15 points

A. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - x - 1$

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$
2. Vérifier que $g(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right)$. En déduire la limite de g en $+\infty$
3. Calculer $g(0)$.
4. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
6. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$.

B. Soit f la fonction définie et dérivable sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

1. En admettant que f est strictement croissante sur $[0, 1]$, montrer que :
pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$
2. Soit (D) la droite d’équation $y = x$
 - a. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$$

- b. Étudier la position relative de la droite et de la courbe \mathcal{C} de f sur $[0, 1]$
3. Déterminer une primitive de f sur $[0, 1]$